17. 05. 2018 Kompleks final sınavı

Komp. Fonk. Teo. Giriş. Final Sınavı Yanıt Anahtarı

1) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$u_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $u_{xx} = \dfrac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$u_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$, $u_{yy} = \dfrac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

olup, $u_{xx}+u_{yy}=0$ olduğundan, u harmoniktir.

$f=u+iv$ analitik $\Rightarrow$ Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır.

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ olduğundan

$v(x,y) = \int u_x\,dy = \int \dfrac{2x}{x^2+y^2}\,dy = 2\arctan\dfrac{y}{x} + \varphi(x)$

$v_x = 2\cdot\dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \varphi'(x) \Rightarrow -\dfrac{2y}{x^2+y^2} = -\dfrac{2y}{x^2+y^2} + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x)=0$

$\Rightarrow \varphi(x) = c$

$\Rightarrow v(x,y) = 2\arctan\dfrac{y}{x} + c$

O halde $f(x+iy) = \ln(x^2+y^2) + i\left(2\arctan\dfrac{y}{x} + c\right)$

$f(z) = \log z^2$ bulunur.

2. ve 3. sorular, defterinizde var.

4) $x=1 \Rightarrow z(t) = 1+it$, $-\pi < t \leq \pi$

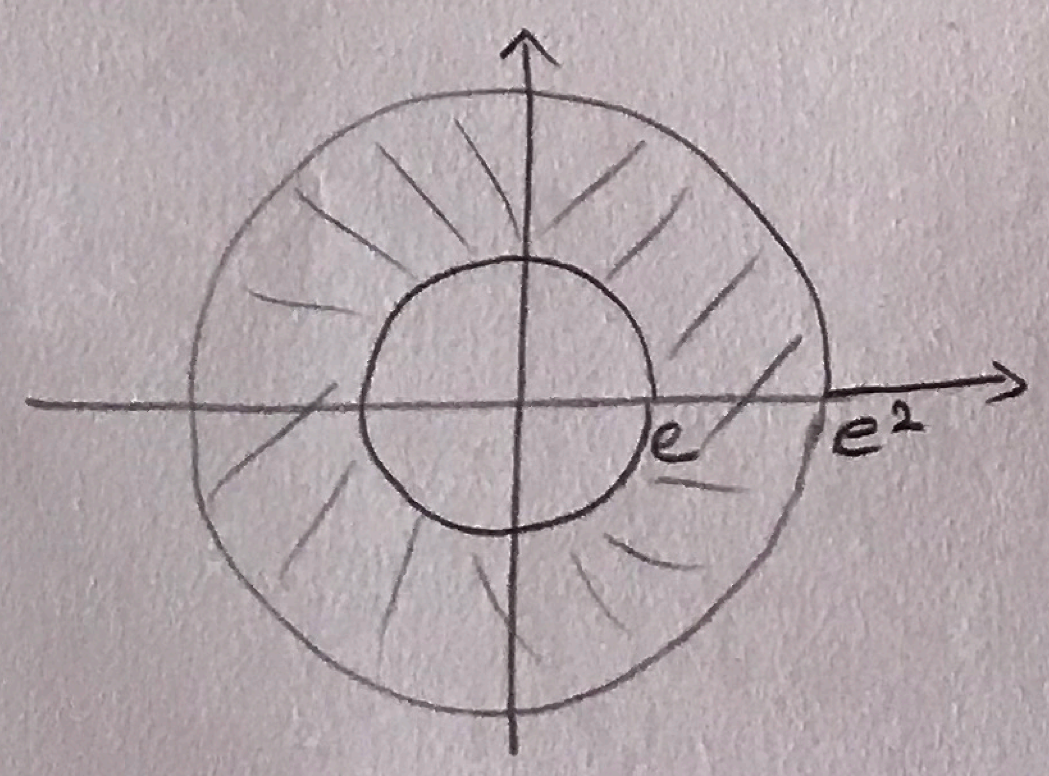
$\Rightarrow w = e^{1+it} = e\cdot e^{it}$, $-\pi < t \leq \pi$

$\Rightarrow$ (0,0) merkezli e yarıçaplı çember.

$1 < x \leq 2 \Rightarrow z(t) = x+it$, $-\pi < t \leq \pi \Rightarrow w = e^x\cdot e^{it}$, $-\pi < t \leq \pi$

$\Rightarrow$ (0,0) merkezli, e^x yarıçaplı çember.

O halde $1 < x \leq 2 \Rightarrow$ istenen bölge $e < |w| \leq e^2$ daire halkasıdır.



5) Fonksiyonu tanımsız yapan noktalar $z^2+i=0$ denkleminin kökleridir.

$$z^2+i=0 \Rightarrow z^2=-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_k=\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)$$

$$z_0=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$z_1=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

$\Rightarrow$ Fonksiyon z_0 ve z_1 noktalarında tanımlı olmadığından, bu noktalarda analitik de değildir. Yani bu noktalarda türevlenemez.

Ayrıca, $\text{Log}(z+4)$ fonksiyonu da

$$A=\mathbb{C}-\{z \mid Re(z+4)\leq 0,\ Im(z+4)=0\}$$
$$=\mathbb{C}-\{z \mid x+4\leq 0,\ y=0\}=\mathbb{C}-\{z \mid x\leq -4,\ y=0\}$$

kümesi üzerinde türevlenebilirdir.

O halde f fonksiyonu $\mathbb{C}-\left(\{z \mid x\leq -4, y=0\}\cup\{z_0,z_1\}\right)$ kümesi üzerinde türevlenebilirdir. Bu küme üzerindeki türevi de

$$f'(z)=\frac{\frac{1}{z+4}\cdot(z^2+i)-2z\cdot\text{Log}(z+4)}{(z^2+i)^2}=\frac{(z^2+i)-2z(z+4)\text{Log}(z+4)}{(z^2+i)^2\cdot(z+4)}$$

6) $$(-1-\sqrt{3}i)^{6i}=e^{6i\,\text{Ln}(-1-\sqrt{3}i)}=e^{6i\left(\ln|-1-\sqrt{3}i|+i\,\text{Arg}(-1-\sqrt{3}i)\right)}$$

$$=e^{6i\left(\ln 2+i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}=e^{(6\ln 2)i+4\pi}$$

$$=e^{4\pi}\cdot e^{(6\ln 2)i}$$

$$=e^{4\pi}\left(\cos(6\ln 2)+i\sin(6\ln 2)\right)$$

$$\text{Arg}(-1-\sqrt{3}i)=\text{Arctan}\sqrt{3}-\pi$$
$$=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

7) $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \, ch y + i \cos x \, sh y$

$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) + \sin x \sin(iy) = \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin x \, ch y + i \cos x \, sh y}{\cos x \, ch y - i \sin x \, sh y} \, (\cos x \, ch y + i \sin x \, sh y)$$

$$= \frac{(\sin x \cos x \, ch^2 y - \sin x \cos x \, sh^2 y) + i(\sin^2 x \, ch y \, sh y + \cos^2 x \, sh y \, ch y)}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, \underbrace{sh^2 y}_{ch^2 y - 1}}$$

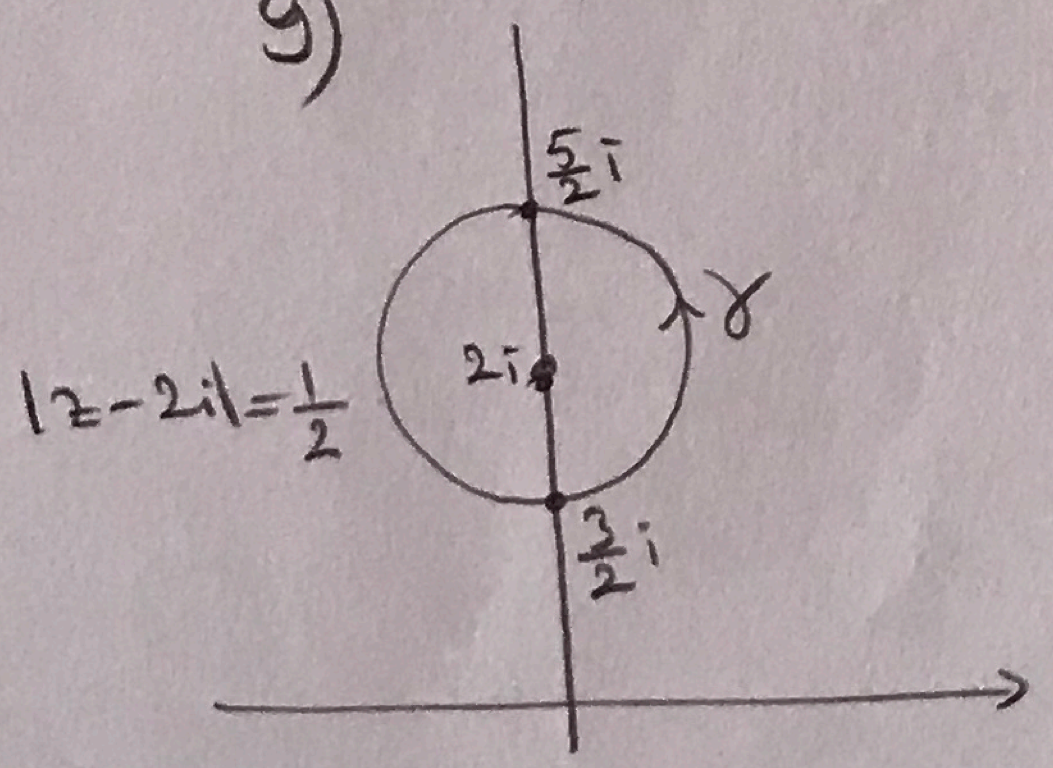
$$= \frac{\sin x \cos x + i \, sh y \, ch y}{\cos^2 x \, ch^2 y + \sin^2 x \, ch^2 y - \sin^2 x} = \frac{\sin x \cos x + i \cdot sh y \, ch y}{ch^2 y - \sin^2 x} \cdot \frac{2}{2}$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x + i \, 2 sh y \, ch y}{2 ch^2 y - 2 \sin^2 x \underbrace{+1-1}_{1 \text{ ekleyip çıkaralım}}} = \frac{\sin 2x + i \cdot sh 2y}{(2 ch^2 y - 1) + (1 - 2\sin^2 x)}$$

$$= \frac{\sin 2x + i \, sh 2y}{ch 2y + \cos 2x}$$

8) Defterinizde var.

9)



$$\int_\gamma \left(\frac{3}{z+2} - \frac{1}{z-2i} \right) dz = \int_\gamma \frac{3}{z+2} dz - \int_\gamma \frac{1}{z-2i} dz$$

olup, $\int_\gamma \frac{3}{z+2} dz$ integralinde $f(z) = \frac{3}{z+2}$ denirse,

f, γ nın içinde ve üzerinde analitik, γ basit kapalı bir eğri olduğundan Cauchy Teoreminden dolayı

$\int_\gamma \frac{3}{z+2} dz = 0$ bulunur.

$\int_\gamma \frac{1}{z-2i} dz$ integrali için, $f(z) = \frac{1}{z-2i}$, $z_0 = 2i$ noktasında analitik değildir ve bu nokta eğrinin içindedir. O halde,

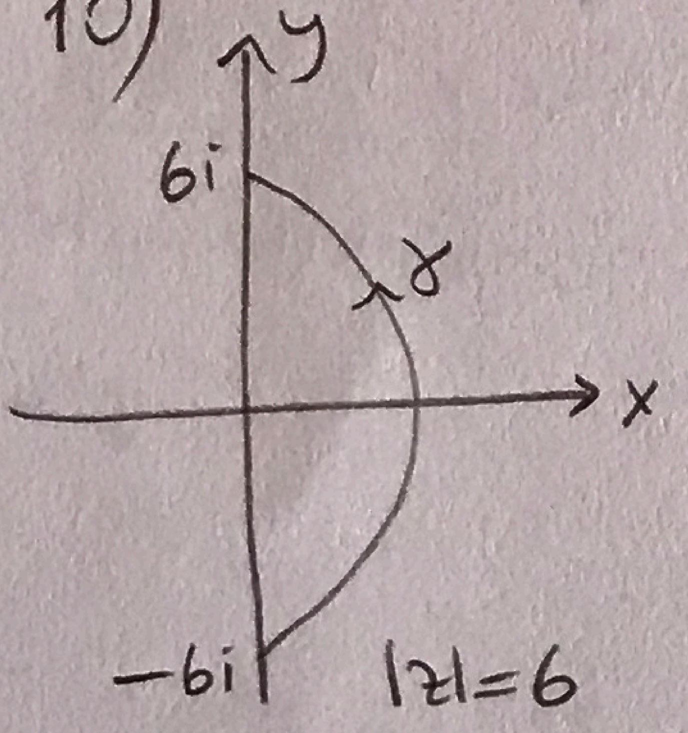
$|z-2i| = \frac{1}{2}$ eğrisi $z(t) = 2i + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ parametrizasyonu ile yazılırsa, eğrisel integral yardımıyla

$$\int_\gamma \frac{1}{z-2i}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{2i}+\cancel{\tfrac{1}{2}}\,\cancel{e^{it}}-\cancel{2i}} \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}\, i\, \cancel{e^{it}}\,dt = 2\pi i$$ bulunur.

O halde istenen integral

$$\int_\gamma \left(\frac{3}{z+2} - \frac{1}{z-2i}\right)dz = \int_\gamma \frac{3}{z+2}\,dz - \int_\gamma \frac{1}{z-2i}\,dz = 0 - 2\pi i = -2\pi i \quad //$$

10)



$\ell(\gamma) = \pi \cdot r = 6\pi$ ($|z|=6$ çemberinin çevresinin yarısı)

$$|z^2-2i| \ge |z|^2 - |2i| = 36 - 2 = 34$$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2-2i|} \le \frac{1}{34} = M$$

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{z^2-2i}\,dz\right| \le M \cdot \ell(\gamma) = \frac{6\pi}{34} = \frac{3\pi}{17}$$